Feuille d'Exercices VIII
Calcul Stochastique

Exercice 1. On considère l'équation différentielle stochastique pour $\alpha > 0$,

$$\mathrm{d}X_t = (-\alpha X_t + \beta)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}B_t, \quad X_0 = x_0.$$

1. Résoudre l'équation et vérifier que la solution peut s'écrire $X_t = \mathrm{e}^{-\alpha t}\left(x_0 + \frac{\beta}{\alpha}(\mathrm{e}^{\alpha t} - 1) + \sigma \int_0^t \mathrm{e}^{\alpha s}\mathrm{d}B_s\right)$
2. Montrer que X_t converge en loi lorsque $t \to \infty$ et trouver la loi limite.
3. Calculer $\mathrm{Cov}(X_s, X_t)$.

Exercice 2. Résoudre l'équation différentielle stochastique

$$\mathrm{d}X_t = tX_t\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}B_t, \quad X_0 = 1.$$

Exercice 3. On considère l'équation différentielle stochastique

$$\mathrm{d}X_t = -\frac{1}{2}\frac{X_t}{1-t}\mathrm{d}t + \sqrt{1-t}\,\mathrm{d}B_t, \quad X_0 = x.$$

1. Trouver la solution de l'équation comme processus gaussien.
2. Comparer la variance de X_t avec celle d'un pont brownien. Est-ce que $(X_t)_{t\geqslant 0}$ est un pont brownien ?

Exercice 4. On considère l'équation différentielle stochastique

$$\mathrm{d}X_t = \left(\sqrt{1 + X_t^2} + \frac{1}{2}X_t\right)\mathrm{d}t + \sqrt{1 + X_t^2}\,\mathrm{d}B_t, \quad X_0 = x.$$

1. Est-ce que cette équation admet une unique solution?
2. Soit $Y_t = \log(\sqrt{1 + X_t^2} + X_t)$, calculer $\mathrm{d}Y_t$.
3. En déduire une solution explicite de l'équation initiale.
   Indication : On remarquera que $X \mapsto \log(\sqrt{1 + x^2} + x)$ est la fonction inverse de $y \mapsto \mathit{sinh}(y)$.

Exercice 5. on considère l'équation différentielle stochastique

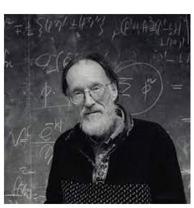
$$\mathrm{d}X_t = (a + bX_t)\mathrm{d}t + (\lambda + \sigma X_t)\mathrm{d}B_t, \quad X_0 = x.$$

On rappelle que si $a = \lambda = 0$, nous avons résolu cette équation en classe et $X_t =: X_0(t) = \mathrm{e}^{\left(b - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t}$.

1. Trouver un processus C tel que $t \mapsto X_0(t)C_t$ est une solution de l'équation générale et donner une solution explicite de l'équation.
2. Montrer que si $\sigma = 0$ alors X_t est un processus gaussien et calculer son espérance et variance.
3. Montrer que si $\sigma = 0$ et $b < 0$ alors X_t convergen en loi lorsque $t \to \infty$ et donner sa loi limite.
4. (**Difficile**) On s'intéresse maintenant à l'équation

$$\mathrm{d}Y_t = (b + \theta \log(Y_t))Y_t\mathrm{d}t + \sigma Y_t \mathrm{d}B_t, \quad Y_0 = y_0 > 0 \qquad (\star)$$

   Montrer que $Z_t = \log Y_t$ est une solution d'une équation différentielle stochastique et montrer que $(\star)$ admet une unique solution telle que $Y_t > 0$ pour tout t presque sûrement. Quelle est la loi de Y_t ? Montrer que si $\theta < 0$, $(Y_t)_t$ converge en loi lorsque $t \to \infty$ et déterminer la loi limite.



Henry Pratt McKean Jr.
(1930–)

Daniel Wyler Stroock
(1940–)